❍ 報告論題：–
『サンクトペテルブルグの賭けゲームとベイズの解』
❍ 報告者 (所属)・共著者 (所属)：–
劉維雪 (福岡大学)・奈良由美子 (放送大学)・藤本浩明 (福岡大学)
● 報告要旨：–
本稿では、サンクトペテルブルグの賭け —公正な硬貨投げをして、オモテが初めて出た回数 x_i により報酬 $r = 2^{x_i-1}$ が決まる— 逆説的ゲームを取扱う。ここで、逆説的とは、報酬の数学的期待値は無限大：$E(2^{\boldsymbol{X}_i-1}) \to \infty$ にも関わらず、巨額な参加料 ϕ を支払う者は皆無であろうことを言う。また、この逆説は、1738 年、Bernoulli (1954) が、対数関数的効用を用いて解決したものと Samuelson (1986) などは考える。しかし、パウンドストーン (2010, p.236) は、1738 年の「論文は、実は $\cdots$、効用に関するものでもなかった。$\cdots$ リスクのある企ては、結果の幾何平均で評価すべき」との主張であり、ケリーの基準 (Kelly, 1956) との関連性に言及する。そこで、本稿では、ベイズリスクの最小化の観点から、当該賭けゲームに関する様々な期待値 (平均値) を再考察する。すなわち、我々は、幾何 (または負の二項) 分布を標本分布に、そのパラメータと自然共役的に「相性のよいお相手 (松原, 2010, p.68)」として、ベータ分布を事前分布に選び、ベイズの解を考える。

■ 解説 ■

■§1. サンクトペテルブルグの賭けゲームについて：–
これは、ダニエル・ベルヌーイによると、従兄弟のニコラス・ベルヌーイが数学者のピエール・モンモールに提出した問題のひとつである。
要約すると、「ピーターは、賭けをするためのゲームをポールに申し出る。そのゲームでは、公正な硬貨を投げ、落ちたときにオモテが出るまで投げ続ける。ピーターがポールに支払う金額は、もし最初の投げでオモテが出たら 1 デュカ、2 回目では 2 デュカ、3 回目なら 4 デュカ、4 回目なら 8 デュカ $\cdots$ などと、オモテが 1 回増えるたびに倍増する。ポールの期待値について、その交換価値額を決定しなさい。」というものである。
詳細は、Bernoulli (1954, p.31)、パウンドストーン (2010, p.227) などを参照のこと。

■§2. 問題の所在について：–
まず、試行 (ここでは、硬貨投げ) 1 回あたりにウラが出る確率をパラメータ θ で表すと、オモテのそれは $1-\theta$ となる。
つぎに、確率論では、「公正な硬貨投げ」を $\theta = \frac{1}{2}$ と表すので、1 回目にオモテが出る確率は $1-\theta = \frac{1}{2}$、2 回目のオモテの確率は $\theta(1-\theta) = \frac{1}{4}$、3 回目のそれは $\theta^2(1-\theta) = \frac{1}{8}$、$\cdots$、$x$ 回目は $\theta^{x-1}(1-\theta) = \frac{1}{2^x}$ となる。
しかし、実際に試行実験を行うと、例えば 100 回投げると、ウラとオモテがちょうど 50 回ずつ出ることのほうが稀で、値は $\theta = \frac{1}{2}$ に近いかもしれないが、どちらかに偏りがちとなる。つまり、どちらかの確率の値が大きくなる：ウラ $(\theta) \gtrless$ オモテ $(1-\theta)$。
そこで、「公正な硬貨投げ」と言えども、θ の真の値を推定する必要性が生まれ、統計学の登場となる。その際、
① 標本はある分布に従うが、パラメータは未知だけど一定とおくだけの場合 (最尤法など) と
② 標本同様、パラメータもある分布に従うため、ベイズの定理が必要な場合 (ベイズ統計学)
とがある。
また、本稿のように、様々な関数 $u(x_i)$ の期待値計算を行う：$E(u(\boldsymbol{X}_i))$ ときにはなおさら、② の場合の分析を必要とする。なぜならば、一般的に、標本分布の期待値はパラメータ θ の関数：$E(u(\boldsymbol{X}_i)) = v(\theta)$ だから、その θ を実現値とする分布 $\boldsymbol{Q}$ の十分統計量 $\boldsymbol{S}$ を所与 s として、ある損失関数 $\mathcal{L}$ の期待値、すなわち、ベイズリスク：$E(\mathcal{L}(v(\boldsymbol{Q}))|\boldsymbol{S} = s)$ を最小にする解、トーマス・ベイズの解 "*Bayes' solution* (Hogg and Craig, 1995, pp.367-8)" を必要とするからである。
したがって、本稿は従来の研究と大きく異なり、懸案の色々な期待値 (平均値) をパラメータ θ の関数として再考察しながら、その推定に ② の手法を用いる。
すなわち、我々は、当該賭けゲームの標本分布 $\boldsymbol{X}_i$ として幾何分布を、パラメータ θ を実現値とする事前分布 $\boldsymbol{Q}$ としてベータ分布を選び、その事後分布を計算する際に、ベイズの定理を使用する。この場合、第 n 回目のオモテが出るまでの試行回数の和 $\sum_{i=1}^{n} \boldsymbol{X}_i$ が負の二項分布に従い、十分統計量 $\boldsymbol{S}$ となることが予測される。

■§3. 幾何分布について：–

硬貨投げの試行 1 回あたりにおいて、ウラが出る確率をパラメータ θ、オモテのそれを $1-\theta$、そして、初めてオモテが出るまでの試行回数を $\boldsymbol{X}_i$ とおくと、確率変数 $\boldsymbol{X}_i$ は、幾何分布に従う。

よって、その実現値を x_i とすれば、初めてオモテが出るまでウラが x_i-1 回出続けるわけだから、確率密度関数 $f_i(x_i)$ は、

$$(1)\quad f_i(x_i)=\begin{cases}\theta^{x_i-1}(1-\theta) & \text{if } x_i=1,\,2,\,3,\cdots;\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

となり、等比級数の和から、$\sum_{x_i=1}^{\infty}f_i(x_i)=(1-\theta)\sum_{z=0}^{\infty}\theta^z=\frac{1-\theta}{1-\theta}=1$ を満足することがわかる。

その積率母関数 $M_i(t)\equiv E(e^{t\boldsymbol{X}_i})=\sum_{x_i=1}^{\infty}e^{tx_i}f_i(x_i)=\frac{(1-\theta)e^t}{1-\theta e^t}$ を t で 4 階まで微分すれば、$M_i^{(1)}(t)\equiv\frac{dM_i(t)}{dt}=\frac{(1-\theta)e^t}{(1-\theta e^t)^2}$, $M_i^{(2)}(t)\equiv\frac{d^2M_i(t)}{dt^2}=\frac{(1-\theta)e^t(1+\theta e^t)}{(1-\theta e^t)^3}$, $M_i^{(3)}(t)\equiv\frac{d^3M_i(t)}{dt^3}=\frac{(1-\theta)e^t(1+4\theta e^t+\theta^2e^{2t})}{(1-\theta e^t)^4}$, $M_i^{(4)}(t)\equiv\frac{d^4M_i(t)}{dt^4}=\frac{(1-\theta)e^t(1+11\theta e^t+11\theta^2e^{2t}+\theta^3e^{3t})}{(1-\theta e^t)^5}$ である。

よって、4 次までの原点 (0) まわりの積率 (モーメント) や期待値が、それぞれ、$M_i^{(1)}(0)\equiv E(\boldsymbol{X}_i)=\sum_{x_i=1}^{\infty}x_if_i(x_i)=\frac{1}{1-\theta}\equiv\mu$, $M_i^{(2)}(0)\equiv E(\boldsymbol{X}_i^2)=\sum_{x_i=1}^{\infty}x_i^2f_i(x_i)=\frac{1+\theta}{(1-\theta)^2}$, $M_i^{(3)}(0)\equiv E(\boldsymbol{X}_i^3)=\sum_{x_i=1}^{\infty}x_i^3f_i(x_i)=\frac{1+4\theta+\theta^2}{(1-\theta)^3}$, $M_i^{(4)}(0)\equiv E(\boldsymbol{X}_i^4)=\sum_{x_i=1}^{\infty}x_i^4f_i(x_i)=\frac{1+11\theta+11\theta^2+\theta^3}{(1-\theta)^4}$ となる。

なお、n 個の独立した $\boldsymbol{X}_i$ の和 $\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i$ の積率母関数 $M(t)\equiv E(e^{t\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i})$ は、$M(t)=E(e^{t\boldsymbol{X}_1})\,E(e^{t\boldsymbol{X}_2})\cdots E(e^{t\boldsymbol{X}_n})=\Pi_{i=1}^{n}M_i(t)=\{\frac{(1-\theta)e^t}{1-\theta e^t}\}^n$ である。

■§4. 負の二項分布について：–

つぎに、第 $n(>1)$ 回目のオモテが出現することを考えよう。

まず、(1) 式では、第 $n=1$ 回目のオモテが出るまで x_i 回硬貨投げ (試行) を行うので、第 $n(>1)$ 回目までの試行の総回数 y は、$y=\sum_{i=1}^{n}x_i$ である。

また、その $y-1$ 回までには、確率 $1-\theta$ のオモテが $n-1$ 回、確率 θ のウラが $y-1-(n-1)=y-n$ 回現れており、最後の 1 回がオモテとなるので、全部で $y-1$ 通りの場合の数からそれらの組み合わせ $\frac{(y-1)!}{(y-n)!(n-1)!}$ を係数として考えればよい。

すると、確率密度関数 $g(y)$ は、

$$(2)\quad g(y)=\begin{cases}\frac{(y-1)!}{(y-n)!(n-1)!}\theta^{y-n}(1-\theta)^{n-1+1} & \text{if } y=n,\,n+1,\,n+2,\cdots;\\ 0 & \text{elsewhere}\end{cases}$$

で、マクローリン展開から、$\sum_{y=n}^{\infty}g(y)=(1-\theta)^n\sum_{z=0}^{\infty}\frac{(z+n-1)!}{z!(n-1)!}\theta^z=\frac{(1-\theta)^n}{(1-\theta)^n}=1$ を満たしており、確率変数 $\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i$ は負の二項分布に従う。

なお、その積率母関数は、当然ながら、■§3 で求めた $M(t)$ と等しくなる：$M(t)\equiv E(e^{t\boldsymbol{Y}})=E(e^{t(\boldsymbol{Z}+n)})=e^{tn}\sum_{z=0}^{\infty}e^{tz}g(z)=e^{tn}(1-\theta)^n\sum_{z=0}^{\infty}\frac{(z+n-1)!}{z!(n-1)!}(e^t\theta)^z=\frac{e^{tn}(1-\theta)^n}{(1-e^t\theta)^n}=\{\frac{(1-\theta)e^t}{1-\theta e^t}\}^n$.

■§5. 懸案の期待値 (平均値) について：–

では、試行の硬貨投げをして、オモテが初めて出た回数 $\boldsymbol{X}_i$ によって不確実に決定される、ゲームの報酬 $\boldsymbol{R}=2^{\boldsymbol{X}_i-1}$ の各期待値 (平均値) が、パラメータ θ(試行 1 回あたりにウラの出る確率) の関数で、その推定値 $\hat{\theta}$ に依存、すなわち、各人の主観的確率の値 $\theta=\hat{\theta}$ に依存することを示そう。

❶ 数学的期待値：$E(\boldsymbol{R})=E(2^{\boldsymbol{X}_i-1})$；

$$(3)\quad E(2^{\boldsymbol{X}_i-1})=\sum_{x_i=1}^{\infty}2^{x_i-1}f_i(x_i)=(1-\theta)\sum_{x_i=1}^{\infty}(2\theta)^{x_i-1}=\frac{1-\theta}{1-2\theta}=\frac{1-2\theta+\theta}{1-2\theta}$$

$$(4)\quad =1+\frac{\theta}{1-2\theta}=1+\theta+2\theta^2+4\theta^3+8\theta^4+16\theta^5+\cdots.$$

(3) 式から、$0\le\theta<\frac{1}{2}$ の範囲で、無限級数の和が定義できて、θ の値が左から $\frac{1}{2}$ に近くなればなるほど期待値は発散する：$E(2^{\boldsymbol{X}_i-1})\to\infty$ as $\theta\to(\frac{1}{2})^-$(左から接近)。例えば、ウラの出る確率 θ の推定値が $\hat{\theta}_{❶}=0.4$ ならば $E(2^{\boldsymbol{X}_i-1})=3$、$\hat{\theta}_{❶}=0.499$ ならば $E(2^{\boldsymbol{X}_i-1})=250.5$、$\hat{\theta}_{❶}=0.49999$ ならば $E(2^{\boldsymbol{X}_i-1})=25,000.5$ となる。なお、(4) 式は、(3) 式のマクローリン展開である。

❷ 平方根の期待値：$E(\sqrt{\boldsymbol{R}}) = E(\sqrt{2^{\boldsymbol{X}_i-1}})$；

(5) $\quad E(\sqrt{2^{\boldsymbol{X}_i-1}}) = \sum_{x_i=1}^{\infty} \sqrt{2^{x_i-1}} f_i(x_i) = (1-\theta)\sum_{x_i=1}^{\infty}(\sqrt{2}\theta)^{x_i-1} = \frac{1-\theta}{1-\sqrt{2}\theta}.$

これは、ガブリエル・クラメールの “psychic expectation(Bernoulli, 1954, pp.34-5)” である。

推定値が $\hat{\theta}_{❷} = 0.5$ ならば $E(\sqrt{2^{\boldsymbol{X}_i-1}}) \approx 1.7071$ なので、❶ の推定値では、$\hat{\theta}_{❶} \approx 0.2929$ に相当、自乗すると 2.9142 だから、価値は 3 より小さいとする。これは、上記 $\hat{\theta}_{❶} = 0.4$ に近く、$\frac{1-\theta}{1-\sqrt{2}\theta} = 3$ を解けば、$\hat{\theta}_{❷} \approx 0.6167$ を得る。すなわち、(3) 式同様、(5) 式も発散しうることが判明する：$E(\sqrt{2^{\boldsymbol{X}_i-1}}) \to \infty$ as $\theta \to (\frac{\sqrt{2}}{2})^- \approx 0.7071$。

❸ 幾何平均値：$G_m(\boldsymbol{R}) = 2^{E(\boldsymbol{X}_i-1)}$；

(6) $\quad 2^{E(\boldsymbol{X}_i-1)} = 2^{\sum_{x_i=1}^{\infty}(x_i-1)f_i(x_i)} = 2^{E(\boldsymbol{X}_i)-1} = 2^{1/(1-\theta)-1} = 2^{\theta/(1-\theta)}.$

これが、本稿冒頭 ● 報告要旨で言及した、パウンドストーン (2010, p.236) の主張する “moral expectation (Bernoulli, 1954, p.24, p.32)”、つまり、$(2^0)^{1-\theta}\ (2^1)^{\theta(1-\theta)}\ (2^2)^{\theta^2(1-\theta)}\ (2^3)^{\theta^3(1-\theta)} \cdots = 2^{0\theta^0(1-\theta)+1\theta^1(1-\theta)+2\theta^2(1-\theta)+3\theta^3(1-\theta)+\cdots} = 2^{\sum_{x_i=1}^{\infty}(x_i-1)f_i(x_i)} = 2^{\sum_{x_i=1}^{\infty}x_i f_i(x_i)-1}$ のことである。

推定値が $\hat{\theta}_{❸} = 0.5$ ならば $2^{E(\boldsymbol{X}_i-1)} = 2$ であり、$\frac{1-\theta}{1-2\theta} = 2$ から $\hat{\theta}_{❶} = \frac{1}{3}$ に、$\frac{1-\theta}{1-\sqrt{2}\theta} = 2$ より $\hat{\theta}_{❷} \approx 0.5469$ に対応している。また、(6) 式も発散しうることがわかる：$2^{E(\boldsymbol{X}_i-1)} \to \infty$ as $\theta \to 1^-$。

それでは、対数型の効用 (*utility*)“emolumentum (Bernoulli, 1954, p.24, p.27)” を考えよう。

ここでは、利得 r が dr 増加したら、効用 u の増分 du は、利得の増分 dr に比例するが、利得額 r 自身には反比例すると考えればよい：$du = \frac{dr}{r}$。そこで、定数を c、初期資産を a_0 とすると、定積分から、$u = \ln r + c$、$u = \ln \frac{r}{c}$、$u = \ln r + a_0$、$u = \ln \frac{r}{a_0}$、$u = \ln r$ などと様々における。

❹ 自然対数の期待値：$E(\ln \boldsymbol{R}) = E(\ln 2^{\boldsymbol{X}_i-1}) = \{E(\boldsymbol{X}_i) - 1\}\ln 2$, where $\ln 2 \approx 0.6931$；

(7) $\quad \{E(\boldsymbol{X}_i) - 1\}\ln 2 = \{\sum_{x_i=1}^{\infty} x_i f_i(x_i) - 1\}\ln 2 = \{\frac{1}{1-\theta} - 1\}\ln 2 = \frac{\theta}{1-\theta}\ln 2.$

推定値が $\hat{\theta}_{❹} = 0.5$ ならば $E(\ln 2^{\boldsymbol{X}_i-1}) \approx 0.6931$ となる。各推定値 $\hat{\theta}_{❶}, \hat{\theta}_{❷}, \hat{\theta}_{❸}$ に相当する計算は、省略する。また、(7) 式も発散しうることがわかる：$E(\ln 2^{\boldsymbol{X}_i-1}) \to \infty$ as $\theta \to 1^-$。

ところで、原典は、上記 (6) 式以外は無限 (∞) の和：$\sum_{x_i=1}^{\infty}$ ではなく、有限値 N の和：$\sum_{x_i=1}^{N}$ の考察にすり替わってしまっており、意味がないと、数学者カール・メンガーは指摘 (Bernoulli, 1954, 脚注[10] @ p.32) する。なお、$N = 2$ の場合の期待効用の最大化問題は、次頁 ❺ で再論する。

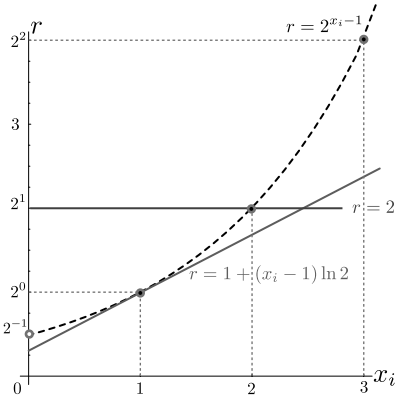
それでは今いちど、凸性を有する賭ゲームの報酬 ($r = r(x_i) = 2^{x_i-1}$) をテーラー展開することによって、(6) 式と (7) 式の意味を考えてみよう。ここでは、２通りの展開とそれらの期待値を考える。(1) 式の平均値 μ ($\equiv \frac{1}{1-\theta} = 2$ if $\theta = \frac{1}{2}$) のまわりの展開と；値 1 のまわりの展開である：

(8) $\quad r = r(\mu) + r'(\mu)(x_i - \mu) + \frac{1}{2}r''(\mu)(x_i - \mu)^2 + \cdots = 2^{2-1} + 2^{2-1}(x_i - 2)\ln 2 + \cdots$;

(9) $\quad r = r(1) + r'(1)(x_i - 1) + \frac{1}{2}r''(1)(x_i - 1)^2 + \cdots = 2^{1-1} + 2^{1-1}(x_i - 1)\ln 2 + \cdots$.

(10) $\quad E(\boldsymbol{R}) = E(2^{\boldsymbol{X}_i-1}) = 2^{E(\boldsymbol{X}_i)-1} + 2^{E(\boldsymbol{X}_i)-1}E(\boldsymbol{X}_i - E(\boldsymbol{X}_i))\ln 2 + \cdots = 2^{E(\boldsymbol{X}_i-1)} + \cdots$;

(11) $\quad E(\boldsymbol{R}) = E(2^{\boldsymbol{X}_i-1}) = 2^0 + 2^0 E(\boldsymbol{X}_i - 1)\ln 2 + \frac{2^0}{2}E((\boldsymbol{X}_i - 1)^2)(\ln 2)^2 + \cdots$.



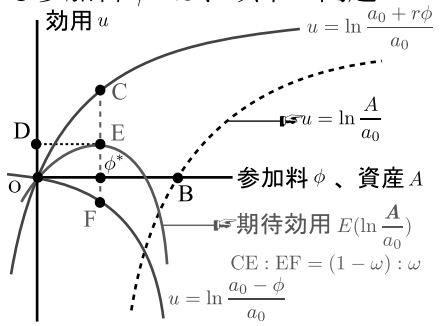
すると、(6) 式と (7) 式は、それぞれ、(8) 式におけるの０次近似式 (定数項)：$r = 2$、ならびに、(9) 式における 1 次近似式 (接線)：$r = 1 + (x_i - 1)\ln 2$ の期待値の (10) 式と (11) 式にしか過ぎない。

効用の増分 du が利得 r に反比例し、その増分 dr に比例するという、ダニエル・ベルヌーイの対数型効用の “凹性”(酒井, 2010, p.66) は、変数 r, x_i に全く影響を与えておらず、直線の傾き $\ln 2$ などに定数として現れるだけである。凹の効用関数がリスク回避、直線が中立、凸が愛好と分類されるものの、しかし、凹の対数関数により、凸の報酬 r が、直線になれても、凹になることはない。また、２次３次と近似の精度が上げれば上げるほど、凸に戻り、■§3 で求めた幾何分布 $\boldsymbol{X}_i$ の高次の積率 $E\{\boldsymbol{X}_i^2\}$, $E\{\boldsymbol{X}_i^3\}$, $\cdots$ が、必要となる。

❺ 二者択一 ($N=2$) の幾何平均の最大化 (または期待効用の最大化)：

それでは、Kelly (1956, p.919) にヒントを得て、サンクトペテルブルグの賭けを、*Win-or-Loss* ゲームとして捉えよう：まず、参加料を ϕ とする。つぎに、リターン率を r とおく。例えば、100 円の参加料で報酬が 256 円のときは、$r=\frac{256-100}{100}=1.56$ である。そして、参加者の初期資産を a_0 とおき、ω の確率で $r\phi$ を勝ちとるか、$1-\omega$ の確率で ϕ を失うものとする。ここで、ω は、参加者が勝つと思う主観的確率 $\mathrm{P_r}$ で、ウラが出る確率 θ の関数：$\omega=\omega(\theta)$ である。この *Win-or-Loss* ゲームの標本分布は、元々、幾何分布ではないが、$\omega=\mathrm{P_r}(2^{\boldsymbol{X}_i-1}\geq\phi=100)=1-\mathrm{P_r}(2^{\boldsymbol{X}_i-1}<100)=1-(1-\theta)\sum_{x_i=1}^{6}\theta^{x_i-1}$, $\omega=\mathrm{P_r}(2^{\boldsymbol{X}_i-1}=128)=\theta^7(1-\theta)$ 等で代替できる。

そこで、基準化した資産 $\frac{\boldsymbol{A}}{a_0}$ の幾何平均 G_m が最大となるような参加料 ϕ^* は、以下の問題：



(12) $\underset{\phi}{\text{Maximizes}}\ G_m(\frac{\boldsymbol{A}}{a_0})\equiv(\frac{a_0+r\phi}{a_0})^{\omega}(\frac{a_0-\phi}{a_0})^{(1-\omega)}$;

(13) $\underset{\phi}{\text{Maximizes}}\ E(\ln\frac{\boldsymbol{A}}{a_0})\equiv\omega\ln\frac{a_0+r\phi}{a_0}+(1-\omega)\ln\frac{a_0-\phi}{a_0}$

から、必要条件 $\frac{dG_m}{d\phi}=0$; または、$\frac{dE(\ln(\boldsymbol{A}/a_0))}{d\phi}=0$ を解けば、

(14) $\phi^*\equiv\frac{(1+r)\omega-1}{r}a_0\begin{cases}>0 & \text{if } \omega>\frac{1}{1+r};\\ =0 & \text{if } \omega=\frac{1}{1+r}\end{cases}$

のように、計算される。対数 ln が、幾何平均の指数を対数の前にだす：$E(\ln\frac{\boldsymbol{A}}{a_0})\equiv\ln G_m(\frac{\boldsymbol{A}}{a_0})$ ためにだけ使用されたり、'期待' が、内分点 CE : EF $=(1-\omega):\omega$ 等の軌跡であることも興味深い。

さて、ここでも結局、主観的確率 w, θ の推定が肝心となる：$\omega>\frac{1}{1+r}$。つまり、リターン率 r が大きければ、人々は、射幸心を起こし、賭けに出る。例えば、サンクトペテルブルグの賭けでは、r は無限なので、$\frac{(1+r)\times\omega-1}{r}\to\omega$ as $r\to\infty$ だから、財産 a_0 の $100\omega\%$ を常に支払うはめに陥る。

なお、射幸心条件：$\omega>\frac{1}{1+r}$ は、$E(\frac{\boldsymbol{A}}{a_0})\equiv\omega\frac{a_0+r\phi}{a_0}+(1-\omega)\frac{a_0-\phi}{a_0}>\frac{a_0}{a_0}$ からでも、入手できる。

■§6. 新ベイズ解について：–

紙面の関係上、簡単に導出を示す。まず、(1) 式のパラメータ θ と「相性のよいお相手 (松原, 2010, p.68)」に、θ を実現値とするベータ分布 $\boldsymbol{Q}$ を事前分布に考えると、以下の密度関数を持つ：

(15) $\pi(\theta)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1} & \text{if } 0\leq\theta\leq1;\\ 0 & \text{elsewhere.}\end{cases}$

すると、(2) 式とイェジ・ネイマンの因数定理 (Hogg and Craig, 1995, p.318) より、核 κ_1 が n 個の独立した (1) 式からの標本 x_i の密度 f_i の積と比例して、$\kappa_1(y|\theta)\propto f_1f_2\cdots f_n$ となるので、確率変数 $\boldsymbol{Y}=\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{X}_i$ は、θ の十分統計量 $\boldsymbol{S}$ $(=\boldsymbol{Y})$ であるから、連続型変数のベイズの定理：

(16) $\pi(\theta|\sum_{i=1}^{n}x_i)\equiv\frac{\pi(\theta)\kappa_1}{\int_0^1\pi(\theta)\kappa_1d\theta}=\frac{\pi(\theta)g(s|\theta)}{\int_0^1\pi(\theta)g(s|\theta)d\theta}\equiv\pi(\theta|s);\ 0\leq\theta\leq1$

を用いると、(15) 式の事後分布 $\boldsymbol{Q}|\boldsymbol{S}$ の確率密度関数 $\pi(\theta|s)\propto\pi(\theta)\kappa_1(s|\theta)$ を得る：

(17) $\pi(\theta|s)=\begin{cases}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+s)}{\Gamma(\alpha+s-n)\Gamma(\beta+n)}\theta^{\alpha+s-n-1}(1-\theta)^{\beta+n-1} & \text{if } 0\leq\theta\leq1;\\ 0 & \text{elsewhere.}\end{cases}$

あとは、この (17) 式を用いて、パラメータ θ の関数 $v=v(\theta)$、例えば、$v=\theta,\theta^2,\frac{1}{1-\theta},\frac{1+\theta}{(1-\theta)^2}$ などの期待値を計算すればよい。ちなみに、幾何分布の平均 $\mu\equiv\frac{1}{1-\theta}=v$ の新ベイズ解は、$E(\frac{1}{1-\boldsymbol{Q}}|s)=\frac{\alpha+\beta+s-1}{\beta+n-1}=\frac{n}{\beta+n-1}\frac{1}{n/s}+\frac{\beta-1}{\beta+n-1}\frac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}$ などと表現されるが、これは、最尤推定量 $\frac{1}{n/s}$ と標本データのない場合 ($n=s=0$)、すなわち、(15) 式における期待値 $E(\frac{1}{1-\boldsymbol{Q}})=\frac{\alpha+\beta-1}{\beta-1}$ との凸結合である。

参考文献

酒井泰弘. 2010. 『リスクの経済思想』, ミネルヴァ書房： 57-85.

パウンドストーン, ウィリアム著；松浦俊輔訳. 2010. 『天才数学者はこう賭ける：誰も語らなかった株とギャンブルの話』, 青土社： 148-61; 226-96.

松原望. 2010. 『よくわかる最新ベイズ統計の基本と仕組み』, 秀和システム, 66-9, 87.

Bernoulli, D. 1954. "Exposition of a New Theory on the Measurement of Risk," *Econometrica*, 22: 23-36.

Hogg, R. V., Craig, A. T. 1995. *Introduction to Mathematical Statistics*, 5th ed., Prentice-Hall, New Jersey, 307-94.

Kelly, Jr. J. L. 1956. "A New Interpretation of Information Rate," *Bell System Technical Journal*, 35: 917-26.

Samuelson, P. A. 1986. "St. Petersburg Paradoxes: Defanged, Dissected, and Historically Described," *in The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson*, The MIT Press, Cambridge, 5: 133-64.