最適な損害保険料とベイズの解

劉 維雪[1]　山崎 好裕[2]　藤本 浩明[3]
(福岡大学大学院生)　(福岡大学)　(福岡大学)

◆報告要旨

本稿では、D．ベルヌーイの海運保険問題を題材に、ベイズの解から最適な損害保険料を再構築する。なぜならば、地震保険など「損害保険商品の保険料設計を行うためには、補償の対象となる保険事故(クレーム)の発生構造を解明し、その将来予想をすることが必要」なので、クレームの標本分布のパラメータ推定が行われているが、さらに、そのパラメータの自然共役分布を考え、最小分散をもたらすベイズの解から、最適な損害保険料を計算することは、ほとんど例をみないからである。そこで、本稿は、標本分布としてポアソンを、自然共役分布としてガンマ分布を採用する、最適な保険料を計算する。また、全壊・半壊など地震による損害の程度も考慮しながら、ケリーの基準との比較検討も行う。

ところで、その保険問題とは、・・・ペテルブルグの商人であるカイウスが、アムステルダムでは 10, 000 ルーブルで売ることのできる商品をペテルブルグで買ったとする。彼は船での運送を注文するが、保険をかけるかどうかを迷っている。カイウスは、ペテルブルグからアムステルダムまでの航海で、例年この時期年間 100 隻の船の中 5 隻は沈没することをよく知っている。しかし、保険料が 800 ルーブル以下のものはなく、この金額はもう支払えないほど、アムステルダムで売る商品を買ってしまった彼にとってはとんでもない高額である。したがって、問題は保険料を支払わない方が彼にとって、賢明であるという考えの下で、カイウスはこの商品以外にどれだけの富を持っていなければならないか・・・という問題である。

◆◆問題の所在

ベルヌーイは海運保険問題に対して、所持財産だけを計算して、保険を掛けるかどうかを決めている。それに、ベルヌーイが計算した式を見ると、ただ、$\frac{19}{20}$の確率で 10, 000 ルーブルが得られるのと 100%の確率で 9, 200 ルーブルが得られるのと、この 2 つの選択のどちらかを選ぶという式しか見えない。そこで、本稿では、ケリーの基準との関連性を述べ、幾何平均を最大にするような最適な参加料を計算する。また、今の損害保険商品の保険料設計には、確率の更新が考慮されてないので、本稿では、カイウスをベイジアンと仮定して、船が沈むと思う主観確率 ω の更新を取り扱う。さらに、更新された主観確率を推測し、全壊・半壊など地震による損害の程度などのオッズを考慮しながら、その最適な保険料を導出する。

1. はじめに

前述のベルヌーイによって提出された問題は、保険料 ϕ が $\phi = 800$ ルーブルの保険があって、$\omega = \frac{5}{100}$ の確率で船が行方不明になって商品を失った結果、保険金 10, 000 ルーブルが得られるが、一方、$1 - \omega = \frac{95}{100}$ の確率で、つまり、船が安全に到着すると、$\phi = 800$ の保険料だけ損失という問題であるが、ベルヌーイは、「もし、彼の財産を x で表すと、彼の商品が安全に到達するときの期待値を合わせると $\sqrt[100]{(x + 10000)^{95}\ x^5} = \sqrt[20]{(x + 10000)^{19}\ x}$ によって与えられる。保険を掛ければ、彼は $x + 9200$ の確実な財産を持つであろう。この 2 つの大きい式を一致させると、$(x + 10000)^{19}\ x = (x + 9200)^{20}$ を得るので、約 $x = 5{,}043$ となる。もし、カイウスは商品を受け取る期待値を加えて、5, 043 ルーブルより多い総額(財産)が持つならば、彼はちょうど保険を買わないでしょう。もし、逆に彼の財産は 5, 043 ルーブルより少ないなら、彼は商品に保険を掛けるでしょう。」と結論付けた。

ベルヌーイは、カイウスの所持財産 $x = 5{,}043$ を計算して、保険を掛けるかどうかを決めている。しかし、ベルヌーイが計算した式を見ると、幾何平均のようにも見えるが、$\frac{19}{20}$ の確率で 10, 000 ルーブルが得られるのと 100%の確率で 9, 200 ルーブルが得られる、この 2 つのどちらかを選ぶという式にしか見えない。

2. ベイズの解

ベイズリスクの最小化観点から、保険金が得られる主観確率 ω の確率更新を取り扱う。ここでは、海運、自然災害、地震などめったに起こらない事象の保険を取り扱う。

2.1 標本分布(ポアソン分布)

その確率密度関数 $f_i(x_i)$ は、

(1)
$$g(x) = \begin{cases} \frac{\theta^x e^{-\theta}}{x!} & \text{if } x = 0,1,2,3,\cdots; \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

---

[1] 大学院博士課程後期 3 年次生。連絡先は、ed110502@cis.fukuoka-u.ac.jp である。

[2] 経済学部教授；連絡先は、yamazaki@fukuoka-u.ac.jp である。

[3] 経済学部教授；連絡先は、fuji2@fukuoka-u.ac.jp である。

となる。

n 個ポアソン分布の確率密度関数は

(2) $$g(x_1, \cdots x_n) = \frac{\theta^{\sum_{x=1}^{x=n} x_i} \; e^{-n\theta}}{x_1! \cdots x_n!}$$

となる。

2.2 事前分布（ガンマ分布）

さらに、(1)式や(2)式のパラメータ θ と「相性のよいお相手(松原, 2010, p. 69)」である自然共役分布に、その値 θ を実現値とするガンマ分布 $\boldsymbol{\Theta}$ を事前分布として考えると、その分布の確率密度関数 $g(\theta)$ は、

(3) $$g(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} \; \theta^{\alpha-1} \; e^{-\frac{\theta}{\beta}} & \text{if } 0 < \theta < \infty; \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$$

となる。

2.3 事後分布（ガンマ分布）

イェジ・ネイマンの“因数定理：factorization theorem(Hogg,etal.,1995,pp.318)”より、事後分布の確率密度関数 $\kappa(\theta|x_1, \cdots x_n) \propto g(x_1|\theta) \cdots g(x_n|\theta) g(\theta)$ を用いて、ただちに(4)式を得る：

(4) $$\kappa(\theta|x_1, \cdots x_n) = \frac{1}{\Gamma(\sum x_i + \alpha)(\frac{\beta}{n\beta+1})^{\sum x_i + \alpha}} \; \theta^{\sum x_i + \alpha - 1} \; e^{-\theta / \frac{\beta}{n\beta+1}}.$$

この条件確率密度関数$\kappa(\theta|x_1, \cdots x_n)$は、パラメータ $\alpha^* = \sum x_i + \alpha$ と $\beta^* = \frac{\beta}{n\beta+1}$ を持つガンマ分布である。あとは、この事後分布の式を用いて、ベイズリスクと呼ばれる損失関数 $l = (\omega - \delta)^2$ の期待値、すなわち、ベイズの解 $\delta^* = E\left((\boldsymbol{\Omega} - \delta)^2 \middle| \kappa(\boldsymbol{\Theta}|x_1, \cdots x_n)\right)$ を計算すればよい。

2.4 事後分布の期待値(平均)

海運保険に参加する者がベイズリスクを最小にする場合、船が沈んで保険金が得られると思う主観確率 $\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Theta}) = \frac{\boldsymbol{\Theta}}{\lambda}$ （一定期間内、λ は一定の出航回数、$\boldsymbol{\Theta}$ は船が沈むと思う主観的確率)と置く。その最適なベイズの解 δ^*は、事後のポアソン分布から計算可能だが、事前ガンマ分布の平均と最尤推定量の凸結合となる。

そこで、推定に関するベイジアンの意思決定を δ とおくと、ベイズリスクとよばれる損失関数 $l = (\omega - \delta)^2$ の期待値 $E\left((\boldsymbol{\Omega} - \delta)^2 \middle| \kappa(\theta|x_1, \cdots x_n)\right)$ を最小にする意思決定 δ^* である、ベイズの解 δ^* は、必要条件 $\frac{dE}{d\delta} = -2E\left(\boldsymbol{\Omega} - \delta \middle| \kappa(\theta|x_1, \cdots x_n)\right) = 0$ と十分条件 $\frac{d^2E}{d\delta^2} = 2E\left(\boldsymbol{\Omega} \middle| \kappa(\theta|x_1, \cdots x_n)\right) > 0$ とから、事後分布の分散を最小にする事後分布の平均 $E\left(\boldsymbol{\Omega} \middle| \kappa(\theta|x_1, \cdots x_n)\right)$ となるので、

(5) $$\delta^* = E\left(\boldsymbol{\Omega} \middle| \kappa(\theta|x_1, \cdots x_n)\right) = \int_0^1 \frac{\theta}{\lambda} \, \kappa(\theta|x_1, \cdots x_n) \, d\theta = \frac{\beta(\sum x_i + \alpha)}{\lambda(n\beta+1)} = \frac{n\beta}{n\beta+1} \frac{\sum x_i}{\lambda n} + \frac{1}{n\beta+1} \frac{\alpha\beta}{\lambda}$$

より、上述の凸結合で表現できることがわかる。

3. ケリーの基準(幾何平均の最大化問題)

3.1 サンクト・ペテルブルグの賭けゲームと同じようにケリーの基準を用いる場合（船が沈む場合、賭けで自分の資産が２倍になると思う場合と同じ）

冒頭で述べた海運保険と同様の問題に関する最適な保険料を考えよう。まず、保険料を ϕ 、リターン率を ρ を置く。たとえば、800 円の保険料で、全部損失した場合保険金 10,000 円が得られるとすると、リターンは $\rho = \frac{\text{保険金}-\text{保険料}}{\text{保険料}} = \frac{10000-800}{800} = 11.5$である。そして、保険を買う人の初期資産を a_0 とおき、主観確率 $\boldsymbol{\Omega}$ の実現値 ω で、保険金 $\rho\phi$ を得る(船が沈む場合)が、$1-\omega$ の確率で(船が安全に到着する場合)、 ϕ に近いものを資産から失うと仮定する。すると、海運保険問題はコイン投げゲームと同じようにケリーの基準を使える。基準化された資産の幾何平均が最大となるよう最適な保険料は、

(6) $$\text{Maximizes } G_m\left(\frac{A}{a_0}\right) = \left(\frac{a_0 + \rho\phi}{a_0}\right)^{\omega} \left(\frac{a_0 - \phi}{a_0}\right)^{1-\omega}$$

対数の利便性を用いて、(6)式と同値の効用最大化問題は、

(7) $$\text{Maximizes } E\left(\ln\frac{A}{a_0}\right) = \ln G_m\left(\frac{A}{a_0}\right) = \omega \ln\frac{a_0 + \rho\phi}{a_0} + (1-\omega)\ln\frac{a_0 - \phi}{a_0}$$

となるので、必要条件として、$\frac{d \ln G_m}{d\phi} = 0$ ；十分条件$\frac{d^2 \ln G_m}{d\phi^2} < 0$ は常に満たされている。最適な保険料は

(8) $$\phi^* \equiv \frac{(1+\rho)\omega - 1}{\rho} a_0 \begin{cases} > 0 & \text{if } \frac{1}{1+\rho} < \omega \leq 1 \\ = 0 & \text{if } 0 \leq \omega \leq \frac{1}{1+\rho} \end{cases}$$

となり、係数$\frac{(1+\rho)\omega-1}{\rho}$がケリーの公式(Kelly formula)である。

そして、$\omega \gtreqless \frac{1}{1+\rho}$が射幸心条件である。前述したベルヌーイの海運保険では、リターン$\rho = \frac{10000-800}{800} = 11.5$で、$\frac{1}{1+\rho} = \frac{1}{1+11.5} = 0.08$、保険金を得る主観確率$\omega = \frac{5}{100} = 0.05$、$\omega < \frac{1}{1+\rho}$なので、保険をかけないでしょう。もし、保険金を得る主観確率が$\omega = 0.11$であるならば、その時の最適な保険料ϕ^*は、初期資産a_0の$\frac{(1+\rho)\omega-1}{\rho} = \frac{(1+11.5)\times 0.11-1}{11.5} = 0.0326 \approx 3\%$を支払うべきとなる。

3.2 全壊の場合(自分の財産が全部なくなると常に思う場合)

保険を買う人の初期資産をa_0とおき、ωの確率で、財産が全部なくなり、保険金$\rho\phi$を得て、全壊した財産の全額が補償されるが、$1-\omega$の確率で、ϕに近いものを資産から失うと仮定する。すると、基準化された資産の幾何平均が最大となるよう最適な保険料は、

(9)　　Maximizes $G_m\left(\frac{A}{a_0}\right) = \left(\frac{\rho\phi}{a_0}\right)^{\omega}\left(\frac{a_0-\phi}{a_0}\right)^{1-\omega}$

となるから、効用最大化の問題は、

(10)　　Maximizes $E\left(\ln\frac{A}{a_0}\right) = \ln G_m\left(\frac{A}{a_0}\right) = \omega\ln\frac{\rho\phi}{a_0} + (1-\omega)\ln\frac{a_0-\phi}{a_0}$

なので、必要条件として、$\frac{d\ln G_m}{d\phi} = 0$　；十分条件$\frac{d^2\ln G_m}{d\phi^2} < 0$は常に満たされており、最適な保険料は

(11)　　$\phi^* \equiv \omega\, a_0 \begin{cases} > 0 & \text{if } 0 < \omega \leq 1 \\ = 0 & \text{if } \omega \leq 0 \end{cases}$

となる。

所持財産が全部なくなると、$a_0 = 0$という標準で、リターンρが無限大になる。つまり、サンクト・ペテルブルグの賭けゲームと同じように、リターンが無限になると、人々はωという確率で資産が全部なくなると思うと、資産a_0の$100\omega\%$を支払うべきである。

4.射幸心条件について（数学期待値から）

前節では、最適な保険料ϕ^*を計算したが、普通、保険料は会社から提示されるから、わざわざ保険料を計算する必要がない場合が多い。ここで基準化された資産$a_0 = 1$を参照点に、数学の期待値を計算する。$E\left(\frac{A}{a_0}\right) > 1$を解けば、$\frac{1}{1+\rho} < \omega \leq 1$が得る。一方、$E\left(\frac{A}{a_0}\right) \leq 1$をとけば、$0 \leq \omega \leq \frac{1}{1+\rho}$の場合には、保険会社の提示額に応じない。興味深いことには、ケリーのように最適な保険料を計算しなくても、数学の期待値から同じ射幸心条件が$\omega \gtreqless \frac{1}{1+\rho}$が得られる。つまり、

(15)　　主観的確率$\omega \begin{cases} > \frac{1}{1+\rho} & \text{のとき、保険料}\phi\text{を支払う} \\ \leq \frac{1}{1+\rho} & \text{のとき、保険料}\phi\text{を支払わない} \end{cases}$

(16)　　主観的確率$\omega \begin{cases} > 0 & \text{のとき、保険料}\phi\text{を支払う} \\ \leq 0 & \text{のとき、保険料}\phi\text{を支払わない} \end{cases}$

5.ベイズの射幸心条件について

ベルヌーイの海運リスク回避問題において、保険料 800 ルーブル、もし船が沈んだら、保険金 10,000 が得られる。船が沈むと思う主観確率の実現値θ、船が沈んで保険金が得られると思う主観確率のそれをωとおくと、その確率は、$\omega = \omega(\theta) = \frac{\theta}{\lambda}$などと、$\theta$の関数として表現可能となったことを思い出そう。すると、以下の命題を得る。

命題：固定保険料を支払って、保険を掛ける予定がある者が、ベイズリスクを最小化することによって、保険金が得られると思う主観確率$\omega = \omega(\theta)$の最適な意思決定δ^*を図るならば、基準化資産１プラス平均リターン率ρの逆数よりも大きい場合に限る：

(10)　　$\frac{1}{1+\rho} < \delta^* \equiv E\big(\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Theta})\big|\kappa(\boldsymbol{\Theta}|x_1,\cdots x_n)\big) \leq 1$

保険を掛ける、一方、

(11)　　$0 \leq \delta^* \equiv E\big(\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Theta})\big|\kappa(\boldsymbol{\Theta}|x_1,\cdots x_n)\big) \leq \frac{1}{1+\rho}$

の場合、保険を掛けない。

■証明：ベイズリスク$\mathrm{B} \equiv E\big((\boldsymbol{\Omega}-\delta)^2\big|\kappa(\boldsymbol{\Theta}|x_1,\cdots x_n)\big) = \int_0^\infty\left(\frac{\theta}{\lambda}-\delta\right)^2\kappa(\theta|x_1,\cdots x_n)d\theta$を事後ポアソン分布から定義して、必要条件$\frac{dB}{d\delta} = 2\int_0^\infty \kappa(\theta|x_1,\cdots x_n)\,d\theta = 0$を解けば、十分条件$\frac{d^2B}{d\delta^2} = 2\int_0^\infty \kappa(\theta|x_1,\cdots x_n)\,d\theta = 2 > 0$は常に満たされるから、また、$\int_0^\infty \kappa(\theta|x_1,\cdots x_n)\,d\theta = 1$なので、最適なベイズの解$\delta^*$は、

(12) $$\delta^* = \frac{\int_0^\infty \frac{\theta}{\lambda}\kappa(\theta|x_1,\cdots x_n)d\theta}{\int_0^\infty \kappa(\theta|x_1,\cdots x_n)d\theta} = E\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{\lambda}\middle|\kappa(\boldsymbol{\Theta}|x_1,\cdots x_n)\right) = E\left(\boldsymbol{\Omega}(\boldsymbol{\Theta})\middle|\kappa(\boldsymbol{\Theta}|x_1,\cdots x_n)\right)$$

となる。

(証了)□

6.ベイズ解の最適な保険料のシミュレーション分析

ケリーの基準は幾何平均を最大にするような最適な保険料を計算することであるが、確率の更新は考慮されない。また、損害保険では、全壊・半壊の場合によって、保険金が違う。そこで、ベルヌーイの問題のカイウスをベイジアンと仮定、標本データ{5,6,10,15,7}の情報を利用しながら、最適な保険料を計算する。

表1．確信の度合が$\alpha = 2, \beta = 2$の場合のベイズの解δ^*の確率更新

i	$\sum x_i$	$\alpha = 2, \beta = 2$ $\delta^* = E(\boldsymbol{\Omega}\vert\kappa(\boldsymbol{\Theta}\vert x_1,\cdots x_n))$
0	0	0.04
1	5	0.0467
2	11	0.052
3	21	0.0767
4	36	0.0844
5	43	0.0818

上記海運保険を例にすると、ケリーの基準で計算する場合、事前船が沈むと思う主観確率は標本データがないと、$\sum x_i = n = 0$，$\alpha = 2, \beta = 2$より、最適なベイズ解は$\delta^* = \frac{\alpha\beta}{\lambda} = \frac{4}{100} = 0.04 < \frac{1}{1+\rho} = 0.08$なので、最初からこの海運保険を掛けないことになる。なお、1回目の標本データでは($i = 1$)、一ヶ月に$\lambda = 100$回の海運中にθ＝5回船が沈むと、$\delta^* = \frac{\beta(\sum x_i+\alpha)}{\lambda(n\beta+1)} = \frac{2(5+2)}{100(2+1)} \approx 0.0467 < \frac{1}{1+\rho} = 0.08$ になるので保険はまた掛けないでしょう。2回目の標本では($i = 2$)、一ヶ月に$\lambda = 100$回の海運中にθ＝6回船が沈むと、$\delta^* = \frac{\beta(\sum x_i+\alpha)}{\lambda(n\beta+1)} = \frac{2(11+2)}{100(4+1)} \approx 0.052 < \frac{1}{1+\rho} = 0.08$ になるので、また保険をかけないでしょう。3回目の標本では($i = 3$)、一ヶ月に$\lambda = 100$回の海運中にθ＝10回船が沈むと、$\delta^* = \frac{\beta(\sum x_i+\alpha)}{\lambda(n\beta+1)} = \frac{2(21+2)}{100(6+1)} \approx 0.0767 < \frac{1}{1+\rho} = 0.08$ になるので、また保険をかけないでしょう。4回目の標本では($i = 4$)、一ヶ月に$\lambda = 100$回の海運中にθ＝15回船が沈むと、$\delta^* = \frac{\beta(\sum x_i+\alpha)}{\lambda(n\beta+1)} = \frac{2(36+2)}{100(8+1)} \approx 0.0844 > \frac{1}{1+\rho} = 0.08$ になるので、保険に加入するでしょう。この場合、最適な保険料を計算してみると、ϕ^*は、初期資産a_0の$\frac{(1+\rho)\omega-1}{\rho} = \frac{(1+11.5)\times0.0844-1}{11.5} \approx 0.00478 \approx 0.478\%$支払うべきである。保険料が800円で保険金10,000円が得られる場合、最適な保険料は47.8ルーブルである。前述した第4回目のデータでは、$\delta^* \approx 0.0844 > \frac{1}{1+\rho} = 0.08$ なので、保険を掛けるようになったが、最適な保険料と比べて、最初の800円の保険料がかなり高いので、人々は保険を掛けないでしょう。もし、保険料は47.8円より小さいなら、保険を掛けるようになるでしょう。

また、全壊(財産が全部なくなる)の場合では、最適な保険料は$\phi^* \equiv \omega\, a_0$であるので、事前$i = 0$のときに最適な保険料は$0.04 \times 10000 = 400$となる。第4回目のデータでは、最適な保険料は$0.0844 \times 10{,}000 = 844$である。ケリーの基準の計算より多く保険料を払うことになる。

5. おわりに、

本稿では、ベルヌーイの海運保険を取り扱いながら、保険をかけるかどうかの問題を述べた。ポアソン分布を標本分布に、そのパラメータと自然共役的に「相性のよいお相手」であるガンマ分布を事前分布に選び、分散が一番小さいになるような最適推定量、すなわち、ベイズの解を求めることに成功した。さらに、ケリーの基準との関連性を述べ、最適なベイズ解の保険料を導出できた。

参考文献

1. Hogg, R. V. and Craig, A. T. (1995), Introduction to Mathematical Statistics; *5th ed., New Jersey: Prentice Hall:* 259-268; 302-394.
2. 小暮, M. & 東出, J. (2003),『例題で学ぶ損害保険数理』、共立出版。
3. 劉,W.，奈良,Y.，藤本,H. (2012),『サンクト・ペテルブルグの賭けゲームとベイズの解』、社会・経済システム、機関誌第33号イノベーションと社会・経済システム：p85-96
4. 松原, N. (2010),『ベイズ統計学概説フィッシャーからベイズへ』、培風館。
5. 涌井, Y. (2010),『道具としてのベイズ統計』、日本実業出版社: p90-95.
6. 清水, K. (2006),『損保数理・リスク数理の基礎と発展―クレームの分析手法』、共立出版株式会社：p59-136.