

## ● ジニ係数およびローレンツ曲線に関する再構築

馬場 晶 悟(福岡大学大学院生) 山崎 好 裕(福岡大学経済学部教授) 藤本 浩 明(福岡大学経済学部教授)

## 報告要旨

「規制緩和・市場の競争原理を重視した小泉路線が不平等社会を助長したことはなかった」、「たとえ富裕層が増加したとしても、再分配機能によって、貧困層の生活は底上げ可能である」などとする格差容認論がある一方で、地域間、男女間、各種年金受給者間、正規・非正規労働者間での、所得格差拡大問題が盛んに論じられている。どうして、そのような判断の相違が生じるのであろうか？本稿では、完備性を付与されたはずのジニ係数の格差、あるいは不平等度の比較能力に疑問を投げかけ、ローレンツ曲線にマクローリン展開やテーラー展開を試みることによって、ジニの考案したローレンツ曲線(冪乗関数)自体が特殊であることを証明する。また、紙面の関係上、所得分布が一様分布の場合のみではあるが、それらの分布および可処分所得分布ならびに社会保障再分配所得分布に関する不平等度測定の有効性と限界について考察する。また、それとの関係で、セン測度についても言及する。

## 1 はじめに

「百聞は一見に如かず」である。まず、本稿の巻末に掲載した図1(横軸  $y_i$  が所得額;  $y_i \geq 0$ 、縦軸  $f_i$  がその受給者の頻度;  $f_i > 0$ ) に描かれた4つの所得分布  $Y_1$ 、 $Y_2$ 、 $Y_3$ 、および  $Y_4$  を考えよう。なお、実現値を  $y_i$  とする分布  $Y_i$  の密度関数  $f_i(y_i)$  などの数学的表現は後節に譲るとして、各所得分布は一様分布に従うが、それぞれの数学的期待値  $E$  または平均値 ( $\mu_1 \equiv E(Y_1)$ 、 $\mu_2 \equiv E(Y_2)$ 、 $\mu_3 \equiv E(Y_3)$ 、および  $\mu_4 \equiv E(Y_4)$ ) などの積率の値は異なるものと仮定する：つまり、 $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$  である。すると、その図中では、どの所得分布が最も平等で、図1 平均値の異なる一様な所得分布逆に最も不平等だと言えるのであろうか？このような不平等の度合(単に、不平等度)への要求に応じてきたのが、ローレンツ曲線を利用したジニ係数だと言われている。そこで、ジニ係数による不平等度を表すための記号を  $\ll$ 、すなわち、平等  $\ll$  不平等とすると、詳細な分析は後述するとして、冒頭のここでは、その解答だけを述べておくと、一番平等とされる所得分布は分布  $Y_1$  となり、以下、分布  $Y_4$ 、 $Y_3$  と続き、最も不平等な分布が  $Y_2$  となる：つまり、不平等度の順序は、 $Y_1 \ll Y_4 \ll Y_3 \ll Y_2$  となる。

しかし、我々は、ジニ係数によるこの結果： $Y_1 \ll Y_4 \ll Y_3 \ll Y_2$  に驚きを隠せない。なぜならば、結果の順序が、平均値の大小に限らず、分散など所得格差の大小にも無関係なようにしか見えないからである。結局、ジニ係数同士の比較はおろか、その計算自体、無意味なのかもしれないとすら思える。本稿の主目的は、このような結果が生じる原因を数学的に解明することであり、また、ジニ係数の有用性について言及することである。そこで、本稿の構成は以下の通りである：次節において、ジニ係数の完備性と限界について述べる；続く第3節では、上述した所得分布の不平等度の順序を詳しく解説する；そして、第4節で、比例税ではあるが、所得税課税前後の所得分布の不平等度を考察する；最後の第5節において、ジニ係数とセン測度との関係をまとめるとともに、今後の課題などを挙げる。

## 2 ジニ係数の完備性とその不平等度の限界

周知のように、ジニ係数は、ローレンツ曲線と密接な関わりをもって用いられてきた。両者の関係は不即不離のように思っている一般の人々も多いことであろう。しかし、ジニ係数とローレンツ曲線との間には決定的な間隙が存在することも確認されるべきであろう。

ここで、本稿の巻末の図2 に描かれるような3本のローレンツ曲線を考えてみよう。まず、ローレンツ曲線  $L_a$  は、左下の低所得の部分では最も破線の対角線に近いが、高所得の領域ではローレンツ曲線  $L_b$  よりも右側に出る。次に、そのローレンツ曲線  $L_b$  は、高所得の領域では最も破線の対角線に近い。最後に、ローレンツ曲線  $L_c$  はいずれの領域でも最も右下にある。つまり、2本のローレンツ曲線  $L_a$  と  $L_b$  は交差しているのである。

さて、我々の直感に整合的な平等性の測度として、あるローレンツ曲線が他の曲線よりも厳密に内側に位置しているという二項関係を考えるのは自然なことである。この二項関係に従えば、所得分布  $A$  は  $C$  よりも平等である、あるいは、分布  $B$  は  $C$  よりも平等であるということに躊躇の必要はないはずである。しかし、分布  $A$  と  $B$  のどちらが平等であるかは、ローレンツ曲線から定義される二項関係では判断することができない。つまり、この二項関係は、推移性は満たすものの、完備性は満たしていないのである。つまり、対角線とローレンツ曲線が囲む面積が、対角線の下側になる二等辺三角形の面積に占める割合として定義されるジニ係数は、不平等度が必ず実数値で表されるという一点において完備性を満たす不平等測度となるのである。

先ほどの2本のローレンツ曲線  $L_a$  と  $L_b$  の相対的な不平等度の順序さえ、ジニ係数の大小であれば厳密な順序付けが可能である。しかし、我々はここでも再び当惑を禁じ得ない。所得分布  $A$  と  $B$  の順序関係を得ることに何の意味があったのだろうか。そして、それは完備性の表現を与えるための意味のない勇み足ではなかったか。こうした疑問が頭をよぎるのである。この関係は、逆に言えば、異なるローレンツ曲線で表される所得分布であっても、同一のジニ係数で表される場合があるということである。だから、所得分布のどの

ような違いが、それぞれ、ローレンツ曲線とジニ係数にどのように反映されるかを、数学的に厳密に確定しておくことが必要である。そこで、我々は、この考察に最も適していると考えた一様分布を用いて、その違いを論じることにした。なぜならば、“According to Professor Gini, many actual distributions of income approximate to the formula  $n = 1/c s^\delta$ ,  $\log n = \delta \log s - \log c$ , where  $s$  is the total income of the  $n$  richest income-receivers and  $\delta$  and  $c$  are constants for any given distribution. (Dalton, 1920, p.359)” などの指摘もあり、そのような所得分布の近似として、工夫しやすい一様分布を選んだ次第である。ここで、英文中の冪乗数  $\delta$  は不平等の尺度「集中の指数 “index of concentration”」であり、冪乗関数形のローレンツ曲線  $L = x^\delta$  の冪乗数に対応している。

### 3 同質な分布間の不平等度について

#### 3.1 一様分布の密度関数

それでは、実現値を  $y_i$  とする一様な所得分布  $Y_i$  の頻度  $f_i$  を表す密度関数  $f_i(y_i)$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) を考えよう。

一様分布は、その平均値  $\mu_i$  に対して端点値パラメータ  $a_i$ ;  $0 < a_i \leq 1$  を用いれば、本稿の巻末の図 3 [左] に描かれるように、懸案の密度関数  $f_i(y_i)$  は、

$$(1) \quad f_i(y_i) = \begin{cases} 1/(2a_i\mu_i) & \text{if } (1-a_i)\mu_i \leq y_i \leq (1+a_i)\mu_i \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases} \quad \text{in which } 0 < a_i \leq 1, \mu_i > 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

なお、2 次の積率  $E(Y_i^2) \equiv \int_{(1-a_i)\mu_i}^{(1+a_i)\mu_i} y_i^2 f_i(y_i) dy_i = (1+a_i^2/3)\mu_i^2$  なので、所得格差を表す分散  $V(Y_i) \equiv E(Y_i^2) - \mu_i^2$  を正の実数値パラメータ  $\sigma_i^2$  とすれば、 $\sigma_i^2 \equiv V(Y_i) = a_i^2 \mu_i^2 / 3 > 0$ , where  $i = 1, 2, 3, 4$  となる。ちなみに、図 1 の各  $(\mu_i, a_i, \sigma_i^2)$  の値は、 $(\mu_1, a_1, \sigma_1^2) = (1, 1/10, 1/300)$ 、 $(\mu_2, a_2, \sigma_2^2) = (2, 1, 4/3)$ 、 $(\mu_3, a_3, \sigma_3^2) = (6, 2/3, 16/3)$ 、および、 $(\mu_4, a_4, \sigma_4^2) = (8, 1/8, 1/3)$  と仮定されている。

#### 3.2 一様分布の分布関数

次に、(1)式の累積頻度  $x_i$  を表す分布関数  $x_i = F_i(y_i)$  を考えると、図 3[中央]に示されたように計算できる：

$$(2) \quad x_i = \begin{cases} 0 & \text{if } y_i < (1-a_i)\mu_i \\ y_i - (1-a_i)\mu_i / (2a_i\mu_i) & \text{if } (1-a_i)\mu_i \leq y_i < (1+a_i)\mu_i \\ 1 & \text{if } y_i \geq (1+a_i)\mu_i \end{cases} \quad \text{where } 0 < a_i \leq 1, \mu_i > 0, i = 1, 2, 3, 4.$$

ここで、端点値パラメータ  $a_i$  の右極限  $\lim_{a_i \rightarrow 0^+} (1 \pm a_i)\mu_i = \mu_i$  より、(2)式は  $\lim_{a_i \rightarrow 0^+} x_i = \begin{cases} 0 & \text{if } y_i < \mu_i \\ 1 & \text{if } y_i \geq \mu_i \end{cases}$  となる。

これは図 3[右]のような階段関数である。(2)式からは所得金額  $y_i$  が累積頻度  $x_i$  の 1 次関数として、次を得る。

$$(3) \quad y_i = 2a_i\mu_i x_i + (1-a_i)\mu_i \equiv y_i(x_i) \quad \text{if } 0 \leq x_i \leq 1, \text{ where } 0 < a_i \leq 1, \mu_i > 0, i = 1, 2, 3, 4$$

#### 3.3 一様分布のローレンツ曲線

それでは、ローレンツ曲線  $L_i = L_i(y_i(x_i))$  を求めよう。この引数  $y_i(x_i)$  は、

$$(4) \quad y_i = y_i(x_i) = \begin{cases} 2a_i\mu_i x_i + (1-a_i)\mu_i & \text{if } 0 \leq x_i \leq 1, \text{ where } 0 < a_i \leq 1, \mu_i > 0, i = 1, 2, 3, 4; \\ \mu_i, x_i = 1 & \text{as } a_i \rightarrow 0^+, \text{ where } \mu_i > 0, i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

なので、

$$(5) \quad L_i = \begin{cases} a_i x_i^2 + (1-a_i)x_i & \text{if } 0 \leq x_i \leq 1, \text{ where } 0 < a_i \leq 1, i = 1, 2, 3, 4; \\ x_i = 1 & \text{as } a_i \rightarrow 0^+, \text{ where } i = 1, 2, 3, 4 \end{cases}$$

を得る。よって、曲線  $L_i$  は、図 4[左]に描かれるように、平均値  $\mu_i$  の大小に無関係な 2 次関数となる。

#### 3.4 一様分布のジニ係数

最後に、ジニ係数  $G_i$  は、本稿の巻末の図 4[右]に描かれたように、直角二等辺三角形の面積(面積  $A_i$  + 面積  $B_i$ )に占める面積  $A_i$  として定義される。すなわち、 $G_i \equiv A_i / (A_i + B_i)$  である。ここで、面積  $A_i \equiv \int_0^1 (x_i - L_i) dx_i = a_i/6$  で、また、面積  $B_i \equiv \int_0^1 L_i dx_i = (3-a_i)/6$  なので

$$(6) \quad \text{ジニ係数 } G_i : 0 < G_i = \frac{A_i}{A_i+B_i} = \frac{a_i/6}{(a_i+3-a_i)/6} = a_i/3 \leq 1/3, \text{ where } 0 < a_i \leq 1, i = 1, 2, 3, 4$$

を入手するので、端点値パラメータ  $a_i$  の大小のみで不平等の度合いが決定されることがわかる。

#### 3.5 図 1 における不平等度

したがって、一様な所得分布  $Y_i$  に関しては、以下の命題を得る。

**命題 1.** 一様分布  $Y_i$  の不平等の度合いは、平均値  $\mu_i$  の大小とは無関係に決まり、分散値  $\sigma_i^2$  の大小ともあまり関係がないが、各  $\mu_i$  の値が等しい際には、 $\sigma_i^2$  の値が小さいほど、必ず、不平等度は小さい。

例題として、小さい方から大きい順に、平均値  $\mu_i$  と分散値  $\sigma_i^2$  とを並べると、 $\mu_1 < \mu_2 < \mu_3 < \mu_4$  で、 $\sigma_1^2 < \sigma_4^2 < \sigma_2^2 < \sigma_3^2$  であったが、これらの順序とは全く無関係に、端点値パラメータ  $a_i$  の順序が、 $a_1 < a_4 < a_3 < a_2$  であったことを思い出そう。すると、冒頭で触れたように、一様な所得分布  $Y_i$  の不平等の度合いを記号  $\ll$  : 平等  $\ll$  不平等で表すならば、それらの不平等度の大小は、我々の直感に反して、(6)式のジニ係数  $G_i = a_i/3$  から、 $Y_1 \ll Y_4 \ll Y_3 \ll Y_2$  となるわけである。

#### 4 所得税課税前後の不平等度について

次いで、実現値を  $y_i$  とする一様な所得分布  $Y_i$  に対して、ある控除額  $y_k \geq 0$  以上の所得金額  $y_i$  を稼いだときには、ある税率  $100t_i\%$ ;  $0 \leq t_i < 1$  の所得税が比例的に課される場合を考察する。

##### 4.1 課税後の密度関数

まず、実現値を  $z_i$  とする課税後の所得分布である可処分所得分布を  $Z_i$  と置くと、可処分所得として、 $Z_i = Y_i - t_i(Y_i - y_k) = (1 - t_i)Y_i + t_i y_k$  だから、実現値表現では、 $z_i = (1 - t_i)y_i + t_i y_k$  なので、逆に、 $y_i = (z_i - t_i y_k)/(1 - t_i)$  のように、変換可能となる。なお、可処分所得分布  $Z_i$  の平均値  $E(Z_i)$  と分散値  $V(Z_i)$  とを、パラメータ  $m_i$  および  $s_i^2$  とで置換すれば、前節で求めた課税前分布  $Y_i$  の平均値  $E(Y_i) \equiv \mu_i$  と分散値  $V(Y_i) \equiv \sigma_i^2 = a_i^2 \mu_i^2/3$  とが、課税後には、以下のように変換される：

$$(8) \quad m_i \equiv E(Z_i) = (1 - t_i)E(Y_i) + t_i y_k = (1 - t_i)\mu_i + t_i y_k > 0;$$

$$(9) \quad s_i^2 \equiv V(Z_i) = (1 - t_i)^2 V(Y_i) = (1 - t_i)^2 \sigma_i^2 = (1 - t_i)^2 a_i^2 \mu_i^2/3 > 0.$$

また、(1)式で示された課税前分布  $Y_i$  の範囲： $(1 - a_i)\mu_i \leq y_i \leq (1 + a_i)\mu_i$  は、 $y_i$  と(8)式とから、以下のよう

$$(10) \quad (1 - a_i)m_i + a_i t_i y_k \leq z_i \leq (1 + a_i)m_i - a_i t_i y_k; \quad 0 < a_i \leq 1, \quad m_i > 0, \quad 0 \leq t_i < 1, \quad y_k \geq 0.$$

すると、ヤコビアン  $J \equiv dy_i/dz_i = 1/(1 - t_i)$  より、分布  $Z_i$  の頻度  $h_i$  を表す密度関数  $h_i(z_i) \equiv f_i(z_i)/J$  は、

$$(11) \quad h_i(z_i) = \begin{cases} 1/\{2a_i(m_i - t_i y_k)\} & \text{if } (1 - a_i)m_i + a_i t_i y_k \leq z_i \leq (1 + a_i)m_i - a_i t_i y_k \\ 0 & \text{elsewhere,} \end{cases}$$

in which  $0 < a_i \leq 1, m_i > 0, 0 \leq t_i < 1, y_k \geq 0$  となり、本稿の巻末の図 6[左]のように描くことができる。

##### 4.2 可処分所得分布の分布関数

次に、(11)式の累積頻度  $x_i$  を表す分布関数  $x_i = H_i(z_i)$  は  $0 < a_i \leq 1, m_i > 0, 0 \leq t_i < 1, y_k \geq 0$  として

$$(12) \quad x_i = \begin{cases} 0 & \text{if } z_i < (1 - a_i)m_i + a_i t_i y_k; \\ \frac{z_i - (1 - a_i)m_i - a_i t_i y_k}{2a_i(m_i - t_i y_k)} & \text{if } (1 - a_i)m_i + a_i t_i y_k \leq z_i < (1 + a_i)m_i - a_i t_i y_k; \\ 1 & \text{if } z_i \geq (1 + a_i)m_i - a_i t_i y_k. \end{cases}$$

端点値パラメータ  $a_i$  関し、右極限  $\lim_{a_i \rightarrow 0^+} \{(1 \pm a_i)m_i \mp a_i t_i y_k\} = m_i$  より、(13)式は

$$\lim_{a_i \rightarrow 0^+} x_i = \begin{cases} 0 & \text{if } z_i < (1 - a_i)m_i + a_i t_i y_k; \\ 1 & \text{if } z_i \geq (1 + a_i)m_i - a_i t_i y_k; \end{cases} \text{となる。}$$

再び、階段関数になる。(13)式からは、可処分所得金額  $z_i$  が、累積頻度  $x_i$  の1次関数として、

$$(13) \quad z_i = 2a_i(m_i - t_i y_k)x_i + (1 - a_i)m_i + a_i t_i y_k \equiv z_i(x_i) \quad \text{if } 0 \leq x_i \leq 1,$$

where  $0 < a_i \leq 1, m_i > 0, 0 \leq t_i < 1, y_k \geq 0$

##### 4.3 可処分所得分布のローレンツ曲線とそのジニ係数

それでは、課税後のローレンツ曲線  $L_i^* = L_i^*(z_i(x_i))$  を求めよう。ここでの引数  $z_i(x_i)$  は、

$$(14) \quad z_i = z_i(x_i) = \begin{cases} 2a_i(m_i - t_i y_k)x_i + (1 - a_i)m_i + a_i t_i y_k & \text{if } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ and } 0 < a_i \leq 1; \\ m_i, x_i = 1 & \text{as } a_i \rightarrow 0^+, \end{cases}$$

in which  $m_i > 0, 0 \leq t_i < 1, y_k \geq 0$

そこで、曲線の定義式  $L_i^* \equiv \frac{1}{m_i} \int_{(1 - a_i)m_i + a_i t_i y_k}^{z_i(x_i)} q_i h_i(q_i) dq_i$  より、図 6[右]に示される曲線  $L_i^*$  :

$$(15) \quad L_i^* = \begin{cases} L_i + a_i t_i y_k (x_i - x_i^2)/m_i & \text{if } 0 \leq x_i \leq 1 \text{ and } 0 < a_i \leq 1; \\ x_i = 1 & \text{as } a_i \rightarrow 0^+, \end{cases}$$

ただし、 $L_i$  : 課税前のローレンツ曲線(5)式  $L_i = a_i x_i^2 + (1 - a_i)x_i$  である。したがって、(5)式および(15)式から直ちに、課税後のジニ係数  $G_i^*$  に関する命題を得る。

**命題 2.** 正の端点パラメータ  $a_i$ ;  $0 < a_i \leq 1$  を持つ一様な所得分布  $Y_i$  に関して、控除額  $y_k (\geq 0)$  または税率  $100t_i\%$ ;  $0 \leq t_i < 1$  が 0 でない限り、累積頻度  $x_i$  の定義域  $0 \leq x_i \leq 1$  の開区間  $0 < x_i < 1$  において、課税後の所得分布  $Z_i$  のローレンツ曲線  $L_i^*$  の値は、常に、課税前の値  $L_i$  よりも大となることから、逆に、課税後のジニ係数値  $G_i^*$  は、課税前の値  $G_i$  よりも小さくなるので、不平等度は改善する。

#### 5 おわりに

我々は本稿において、一様分布のケースを用いることで、ジニ係数の値が平均値には全く依存しない相対額を基準としたものを確認した。厳密には端点値のパラメータのみに依存するのだが、分散値がそのパラメータに依存する限りにおいて、分散値の違いを反映した不平等度の表現が得られるのであった。また、本稿では一定額以上の所得を得ている人々に対して比例所得税を課すことで、ジニ係数で表現される不平等度が改善されることを、一様分布の場合に厳密に証明した。

最後にこれらの結果との関係で、先行研究についても言及をしておこう。

まず、木村 [2008] は、ジニ係数の形成史を一次資料に基づいて解明した労作であるが、我々と同様にそ

の有効性と限界についての考察にも多くの紙幅を割いている。木村は日本の高度成長期に見られたジニ係数の軽微な増加が何を意味しているのかという反省から、ジニ係数が不平等度増大の中身を問題にできないことに気付いた。そして、ジニ係数を平均差と総所得の相加平均に分解することで、所得分布の変化を見極めるという方法を提起している。我々の研究の平均値と分散値への着目と並行した視点であり、頷けるものである。また、木村はジニ係数が絶対額ではなく相対額に基づくものであることから、貧困指標として用いられるときに大きな限界があるとしている。この点については、元々貧困指標としてノーベル賞経済学者のアマルティア・センが作成した、セン測度  $\pi_i = \theta_i \{y_i + (1 - \gamma_i)G_i\}$  が思索の手掛かりとなる。センの貧困測度は、貧困線所得を基準として貧困者層内部の平均的な窮乏度が非常に大きい場合、同じく貧困者内部の不平等度はあまり反映されないが、貧困者層の窮乏度がさほどでもない場合は、その内部の不平等度が大きく反映されるように作られている。そして、ジニ係数は貧困者層内部のものだけが取り入れられている。センの他の指標と同様に多少寄せ集めの構成になっていることは否めないが、セン測度はジニ係数との関係において、また、所得税課税の最下限所得を決める場合などに参考にされ得るものであろう。

参考文献

Dalton, H., "The Measurement of the Inequality of Incomes," *The Economic Journal*, 1920 Sept., pp. 348-61.  
 Gini, C., "Notes and Memoranda: Measurement of the Inequality of Incomes," *The Economic Journal*, 1921 March, pp. 124-6.  
 木村, K., 『ジニ係数の形成』北海道大学出版会, 2008年。  
 Lambert, P. J., *The Distribution and Redistribution of Income*, third edition, Manchester University Press, New York, NY, 2001, pp.13-43.  
 Lorenz, M. O., "Methods of Measuring the Concentration of wealth," *Publications of American Association*, 1905 June, pp. 209-19.

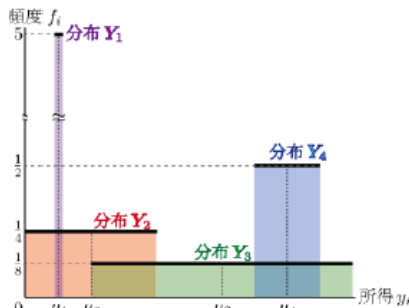


図1 平均値の異なる一様な所得分布との関係

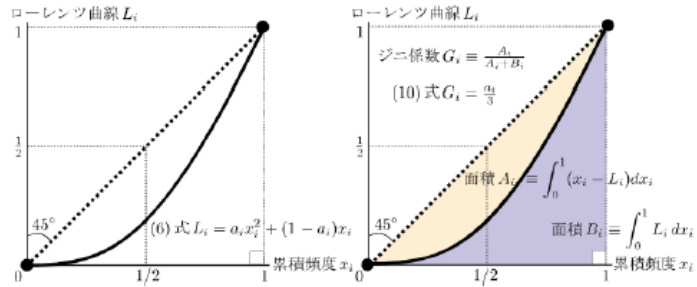


図4 一様な所得分布 Y1 のローレンツ曲線 L\_i とジニ係数 G\_i = 1 - 2 \int\_0^1 L\_i dx\_i

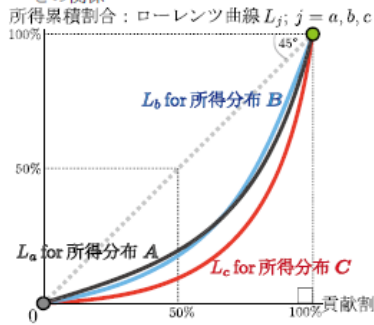


図2 異分布に基づくローレンツ曲線 where i = 1, 2, 3, 4

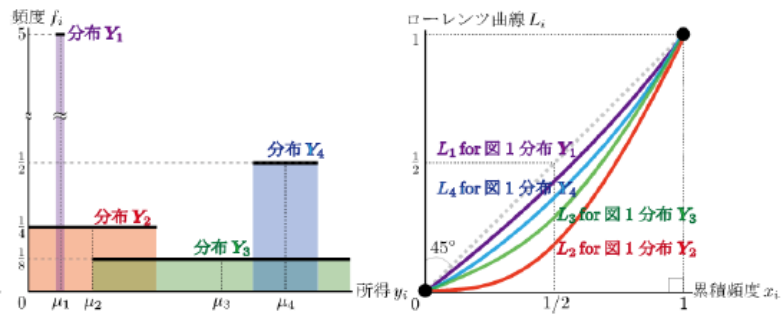


図5 図1の再掲[左]および各所得分布 Y\_i のローレンツ曲線 L\_i の形状[右]

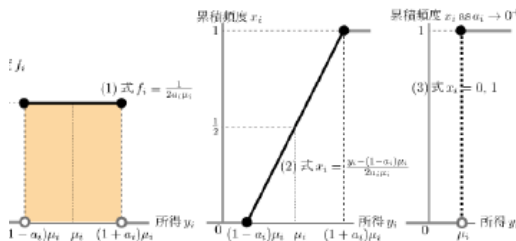


図3 左から順に、一様な所得分布 Y\_i の密度関数 f\_i、曲線 L\_i, L\_i' 分布関数 x\_i、および、分布関数 x\_i as a\_i -> 0+

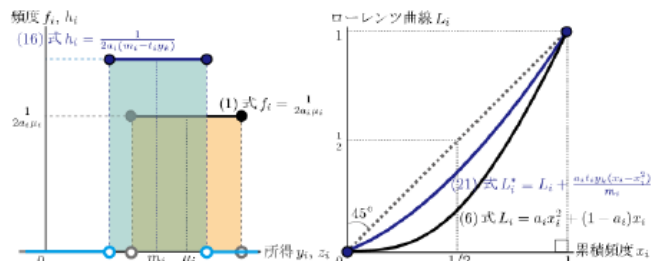


図6 課税前後の所得分布 Y\_i, Z\_i の密度関数 f\_i, h\_i およびローレンツ